

Teoretická část - 8.2.2021

1. (a) Definujte dolní a horní součty a Riemannův integrál (2 body).
(b) Zformulujte větu o nutné a postačující podmínce existence Riemannova integrálu (1 bod).
(c) Zformulujte a dokažte větu o vztahu monotonie a Riemannova integrálu (2 body).
(d) Mějme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dokažte z definice Riemannova integrálu následující tvrzení:
 - i. nechť $f \in \mathfrak{R}([-4, 4])$, potom $f \in \mathfrak{R}([-3, 4])$,
 - ii. nechť $f \in \mathfrak{R}([-4, 4])$, potom $|f| \in \mathfrak{R}([-4, 4])$.Vše řádně zdůvodněte (3 body).

2. (a) Definujte Taylorův polynom (1 bod).
 (b) Zformulujte větu o Peanově tvaru zbytku a větu o Lagrangeově a Cauchyově tvaru zbytku (2, 5 bodu).
 (c) Nechť má funkce f vlastní derivaci v bodě a . Dokažte, že

$$f(x) - f'(a)(x - a) - f(a) = o((x - a)), \quad x \rightarrow a.$$

(1 bod).

- (d) Dokažte větu o Peanově tvaru zbytku (1 bod).
 (e) Mějme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která má vlastní derivaci 6 řádu na $\mathbb{R}$. Nechť f má Taylorův polynom stupně 5 se středem v bodě 0 tvaru $-16+x^5$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
- i. nechť $|f^{(6)}(x)| \leq 1000$, $x \in \mathbb{R}$, potom existuje $x \in (0, 2)$, že $f(x) = 0$,
 - ii. nechť $|f^{(6)}(x)| \leq \frac{1}{1000}$, $x \in \mathbb{R}$, potom existuje $x \in (0, 2)$, že $f(x) = 0$.

Vše řádně zdůvodněte (2, 5 bodu).

3. (a) Definujte limitu funkce a spojitost funkce v bodě (2 body).
(b) Zformulujte větu o dvou strážnících a větu o aritmetice spojitosti (2 body).
(c) Dokažte větu o dvou strážnících (1 bod).
(d) Mějme funkce φ , f , g a h definované na intervalu $(0, 2)$ splňující $f \leq g \leq h$ na $(0, 2)$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
- i. jsou-li f a h spojité v bodě 1, potom je g spojitá v bodě 1,
 - ii. jsou-li f a h spojité v bodě 1 a $f(1) = h(1)$, potom je g spojitá v bodě 1,
 - iii. je-li $|\varphi(x)| < 7$, $x \in (0, 2)$, $f(1) = 7$ a je-li f spojitá v bodě 1, potom je $\varphi \cdot f$ spojitá v bodě 1,
 - iv. je-li $|\varphi(x)| < 7$, $x \in (0, 2)$, $f(1) = 0$ a je-li f spojitá v bodě 1, potom je $\varphi \cdot f$ spojitá v bodě 1.
- Vše řádně zdůvodněte (3 body).